Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten und Skalarprodukt

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Übersicht:

- Grundrechenarten
  - Addition und Subtraktion
  - skalare Multiplikation
- Skalarprodukt

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Übersicht Grundrechenarten:

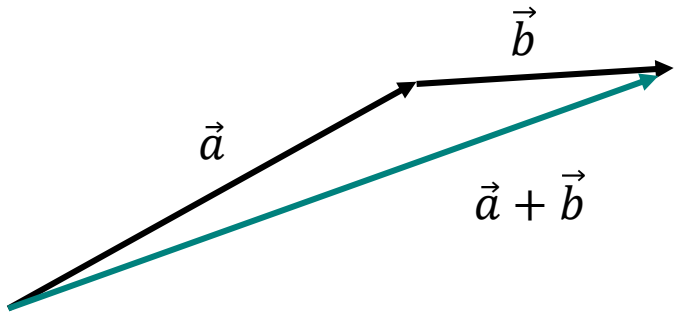
- Addition und Subtraktion
  - geometrisch
  - algebraisch
- skalare Multiplikation
  - geometrisch
  - algebraisch
- Rechenregeln und spezielle Vektoren

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Addition und Subtraktion

Wir addieren zwei geometrische Vektoren, indem wir die Pfeile „hintereinander schieben“…



Mathematische Objekte: Vektoren

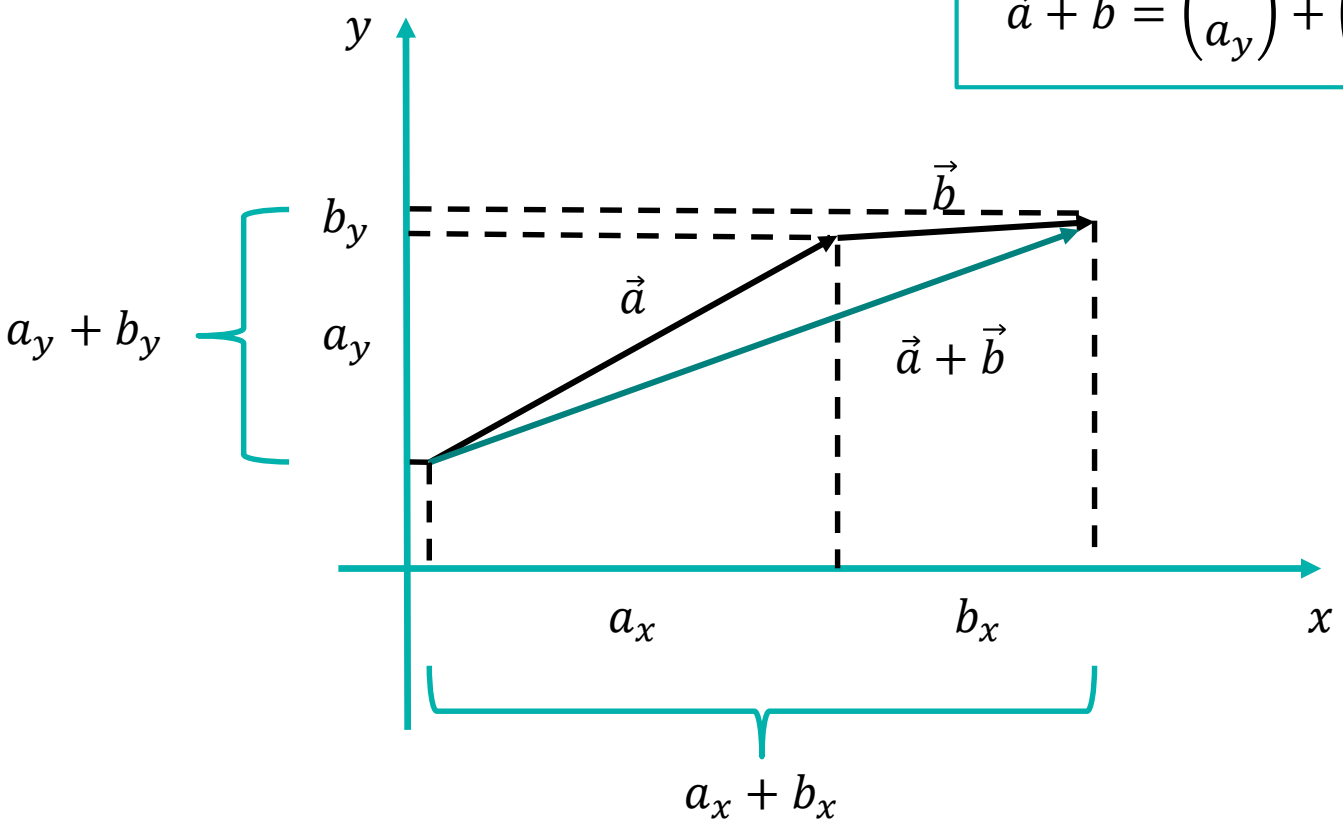
Grundrechenarten für Vektoren

Addition und Subtraktion

Jetzt nehmen wir Koordinaten hinzu…

Vektoraddition:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$



Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Addition und Subtraktion

Bei der geometrischen Subtraktion wird beim zweiten Vektor die Pfeilspitze umgedreht und dann die Pfeile aneinander gelegt…

Vektorsubtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

Hinweis:

Die Subtraktion ist im Prinzip die Addition mit dem Gegenvektor zu $\vec{b}$ …

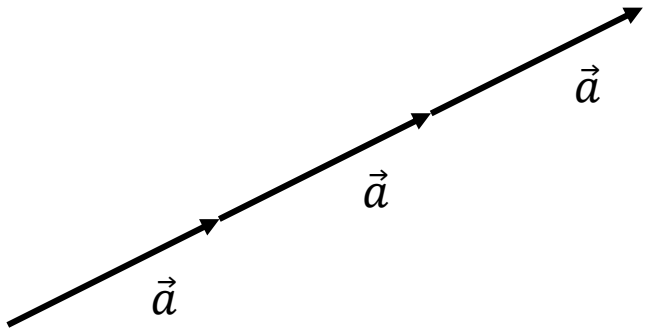
$$\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Skalar Multiplikation

Wir addieren dreimal den gleichen Vektor $\vec{a}$:



Multiplikation mit einem Skalar

Algebraisch („gerechnet"):

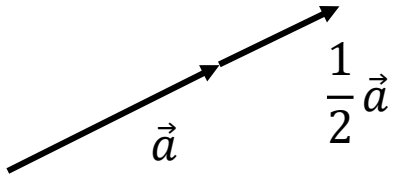
$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x + a_x + a_x \\ a_y + a_y + a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot a_x \\ 3 \cdot a_y \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{a}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Skalar Multiplikation

Wir addieren dreimal den gleichen Vektor $\vec{a}$:



Multiplikation mit einem Skalar

Algebraisch („gerechnet"):

$$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x + 0{,}5 \cdot a_x \\ a_y + 0{,}5 \cdot a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \cdot a_x \\ 1{,}5 \cdot a_y \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \vec{a}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Rechenregeln

Wir haben also zwei Rechenoperationen für Vektoren:

- Addition $\vec{a} + \vec{b}$
- Skalare Multiplikation $\lambda \cdot \vec{a}$

Es gelten gewisse Rechenregeln:

- Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativität $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- Distributivität $\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Spezielle Vektoren

Es gibt spezielle Vektoren:

- Nullvektor $\vec{0}$ mit $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- Gegenvektor $-\vec{a}$ mit $-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

Für die 1 gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Wenn diese Regeln erfüllt sind, liegt ein Vektorraum vor!

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Linearkombinationen von Vektoren

Wir kommen noch einmal auf die Stücklisten zurück…

Wir verkaufen Spielzeugautos…

Die Autos werden als Sets verkauft…



Farbe	Einzeln	Set 1	Set 2
Blau	10	1	2
Rot	5	1	0
Gelb	3	1	2
Grün	7	1	0
Schwarz	0	1	2

Wie viele Autos habe ich im Laden?

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Linearkombination

Mathematische Objekte: Vektoren

Grundrechenarten für Vektoren

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Übersicht Skalarprodukt:

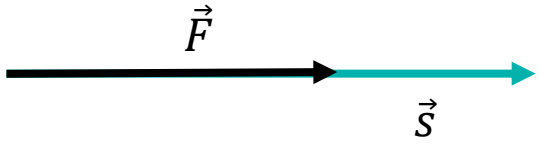
- Beispiel: Arbeit in der Physik
- Geometrische Definition Skalarprodukt
- Beispiel: Winkel zwischen Vektoren
- Betrag eines Vektors
- Definition für n-Tupel
- Beispiel: Stücklisten & Preise
- Zusammenhänge
- Rechenregeln

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

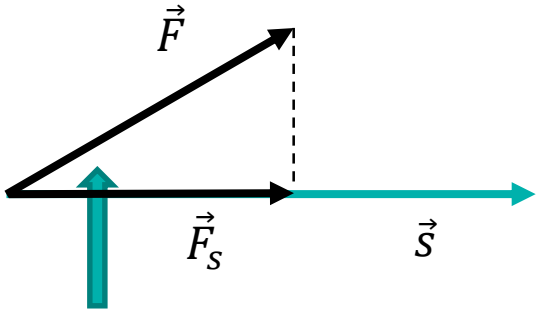
Beispiel: Arbeit in der Physik

Wir bewegen eine Masse mit der konstanten Kraft $\vec{F}$ entlang der Strecke, die durch den Vektor $\vec{s}$ gegeben ist…



Es gilt:

Arbeit = Kraft * Weg $\Rightarrow$ $W = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{s}|$



Winkel α

Berechnung im rechtwinkligen Dreieck:

$\cos\alpha = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}|}$ $\Rightarrow$ $\left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha$

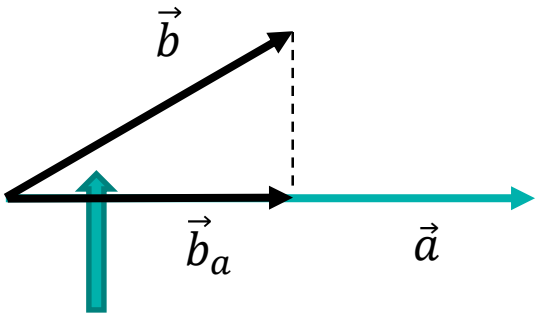
$\Rightarrow$ $W = \left|\vec{F}_s\right| \cdot |\vec{s}| = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Geometrische Definition

Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die einen Winkel α bilden.



Winkel α

Definition Skalarprodukt:

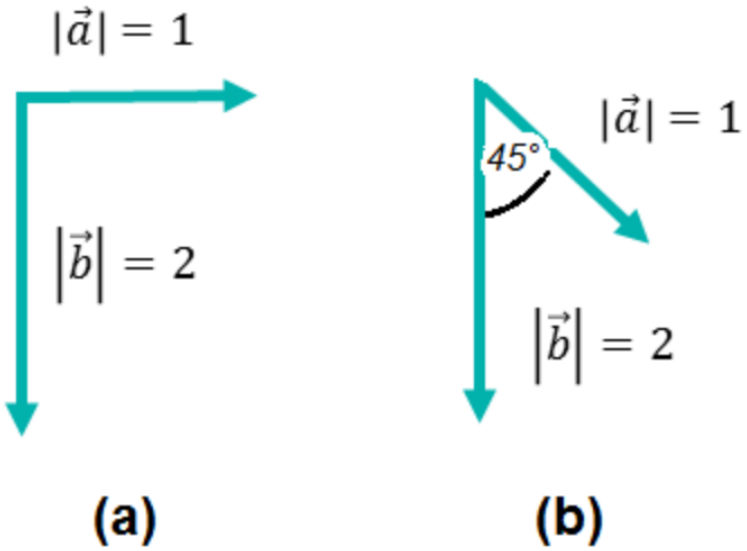
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Bestimmen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in den Skizzen:

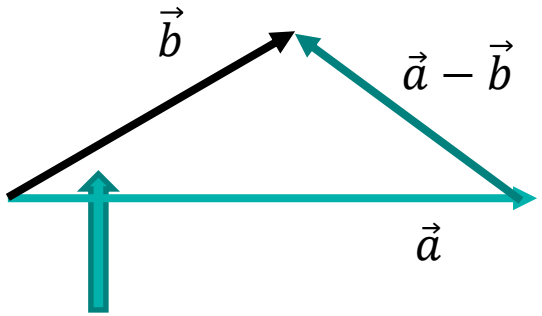


Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Beispiel: Winkel zwischen Vektoren

Das Skalarprodukt ist geeignet um den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen…



Winkel α

Wir kennen:

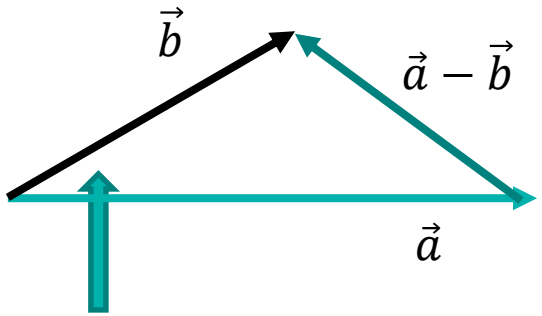
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Beispiel: Winkel zwischen Vektoren

Das Skalarprodukt ist geeignet um den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen…



Winkel α

Wir kennen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

Kosinussatz:

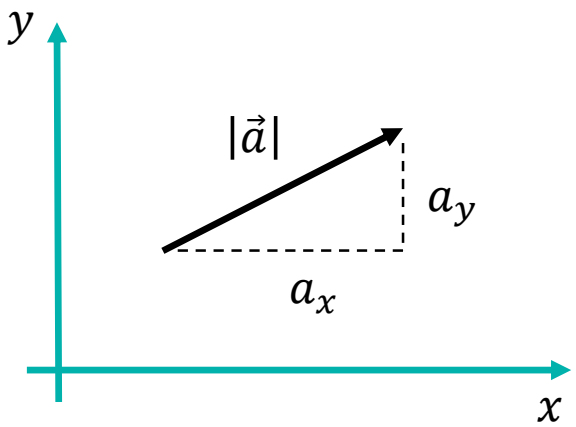
$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \underbrace{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha}_{= \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Betrag eines Vektors

Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors gibt seine Länge an…

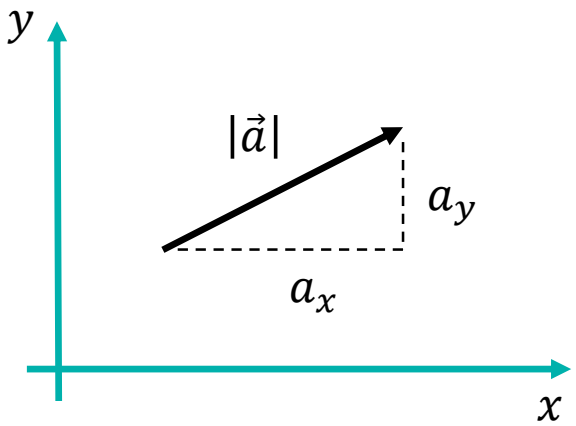


Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Betrag eines Vektors

Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors gibt seine Länge an…



Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Beispiel: Winkel zwischen Vektoren

Zurück zur Winkelberechnung, wir setzen ein…

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$



$$(a_x - b_x)^2 + \left(a_y - b_y\right)^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$



$$a_x^2 - 2a_xb_x + b_x^2 + a_y^2 - 2a_yb_y + b_y^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Wir erhalten:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Definition für n-Tupel

Wir betrachten zwei n-Tupel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Dann wird das Skalarprodukt wie folgt definiert:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \ldots + a_n b_n$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Beispiel: Stücklisten & Preise

Wir verkaufen Spielzeugautos…

Wir haben folgendes Sortiment
mit den zugehörigen Preisen…

Farbe	Anzahl	Preis
Blau	12	1,50 Euro
Rot	5	2,10 Euro
Gelb	7	1,70 Euro
Grün	10	2,20 Euro
Schwarz	4	2,50 Euro



Wie viel Geld bringt unser Sortiment ein?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.1 \\ 1.7 \\ 2.2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 12 \cdot 1.5 + 5 \cdot 2.1 + 7 \cdot 1.7 + 10 \cdot 2.2 + 4 \cdot 2.5 = 72.4$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Zusammenhänge

Wir schauen uns noch einmal beide Definitionen an…

Definition (geometrisch):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Definition (Tupel):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Speziell gilt:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

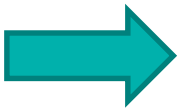
Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vekotren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{30}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73.12^\circ$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Rechenregeln

Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Rechenregeln…

Kommutativität	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Distributivität	$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
Assoziativität	$\lambda \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda \vec{b}\right)$

Mathematische Objekte: Vektoren

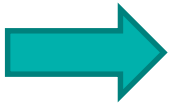
Skalarprodukt

Herleitung mit Standardbasis

Wir wollen die zweite Formel für das Skalarprodukt noch auf eine zweite Weise herleiten…

Definition (geometrisch):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$



Definition (Tupel):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Wir verwenden die Standardbasisvektoren und die Rechenregeln des Skalarproduktes…

Jeder Vektor kann als eindeutige Linearkombination der Standardbasis-vektoren dargestellt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = b_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \qquad = \vec{e}_2$$

Mathematische Objekte: Vektoren

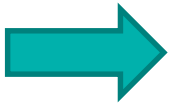
Skalarprodukt

Herleitung mit Standardbasis

Wir wollen die zweite Formel für das Skalarprodukt noch auf eine zweite Weise herleiten…

Definition (geometrisch):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$



Definition (Tupel):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Wir rechnen aus…

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\,\vec{e}_1 + a_y\,\vec{e}_2\right) \cdot \left(b_x\,\vec{e}_1 + b_y\,\vec{e}_2\right)$$

$$= a_x b_x \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{} + a_x b_y \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{} + a_y b_x \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{} + a_y b_y \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{}$$

Wir haben das Problem auf die Skalarprodukte der Standardbasis zurückgeführt

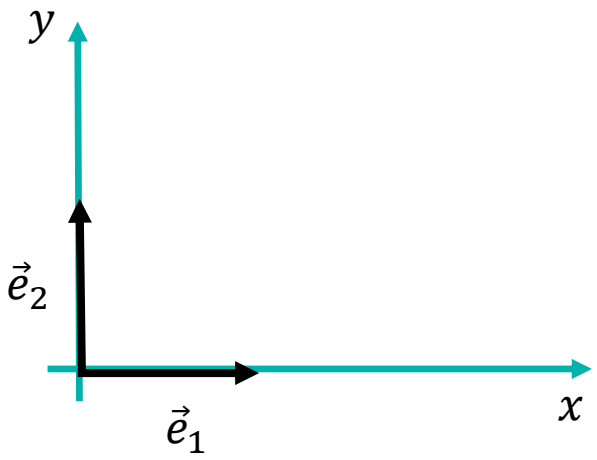
Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Herleitung mit Standardbasis

Wir berechnen die Skalarprodukte der Standardbasisvektoren:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander, daher gilt für die gemischten Produkte:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

Die doppelten Produkte ergeben sich aus den Längen der Vektoren:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Skalarprodukt

Herleitung mit Standardbasis

Wir kommen zurück zum Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{=1} + a_x b_y \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{=0} + a_y b_x \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{=0} + a_y b_y \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$